

1.4 Polynomdivision

Im Grunde ist die Polynomdivision nicht anders, als die schriftliche Division von zwei Termen.

Einstiegsaufgabe: Berechne mit Hilfe der schriftlichen Division die Aufgabe 80766:14.

Für die Polynomdivision wird die Funktion durch einen Linearfaktor dividiert. Dadurch entsteht erneut eine Funktion, deren Grad um eins kleiner ist, als der Grad der Ausgangsfunktion. Zur Nullstellenberechnung muss dies solange fortgeführt werden, bis die restlichen Nullstellen mit einem anderen Verfahren (z.B. pq-Formel) berechnet werden können.

Beispielaufgabe Polynomdivision: $(3x^4 + 2x^3 - 3x^2 + x + 3) : (x + 1)$

$$\begin{array}{r} (3x^4 + 2x^3 - 3x^2 + x + 3) : (x + 1) = 3x^3 - x^2 - 2x + 3 \\ -(3x^4 + 3x^3) \\ \hline -x^3 - 3x^2 + x + 3 \\ -(-x^3 - x^2) \\ \hline -2x^2 - 2x + 3 \\ -(-2x^2 - 2x) \\ \hline 3x + 3 \\ -(3x + 3) \\ \hline 0 \end{array}$$

NR

$$\begin{array}{l} 3x^4 : x = 3x^3 \\ -x^3 : x = -x^2 \\ -2x^2 : x = -2x \\ 3x : x = 3 \end{array}$$

"Rückweg"

$$\begin{array}{l} 3x^3 \cdot x = 3x^4 \\ 3x^3 \cdot 1 = 3x^3 \end{array}$$

usw. für jeden Faktor

$$\rightarrow f(x) = (x + 1) \cdot (3x^3 - x^2 - 2x + 3)$$

Erhält man am Ende der Polynomdivision nicht Null, können 2 Fehler das Problem sein:

1. der ermittelte Wert für den Linearfaktor ist keine Nullstelle (Vorzeichenfehler?!)
2. man hat sich verrechnet

Übungsaufgaben

1) $(x^3 - 3x^2 - 10x + 24) : (x - 2)$

Lsg: $x^2 - x - 12$

2) $(5x^3 - 17x^2 + 4x + 6) : (x - 3)$

Lsg: $5x^2 - 2x - 2$

3) $(-2x^3 + 5x^2 + 16x - 16) : (x - 4)$

Lsg: $-2x^2 - 3x + 4$

4) $(4x^3 - 3x + 1) : (x + 1)$

Lsg: $4x^2 - 4x + 1$

5) $(x^3 - x) : (x - 1)$

Lsg: $x^2 + x$

6) $(2x^4 + 3x^3 + x^2 - 3x - 3) : (x + 1)$

Lsg: $2x^3 + x^2 - 3$

7) $(x^5 - x^4 + 3x - 3) : (x - 1)$

Lsg: $x^4 + 3$

1.5 Linearfaktordarstellung von Funktionen / Nullstellen ermitteln

Beispielaufgabe: Gegeben sei die Funktion $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 4x - 1$. Um die Nullstellen dieser Funktion zu berechnen, muss die erste Nullstelle „geraten“ werden. Durch systematisches probieren ($x=1$; $x=-1$; $x=2$; $x=-2$; ...) erhält man als eine erste Nullstelle $x_1 = 1$:

$$\begin{aligned} 0 &= 2x^3 + 3x^2 - 4x - 1 & | x = 1 \\ 0 &= 2 \cdot 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 - 1 \\ 0 &= 0 \quad \text{w.A.} \quad \Rightarrow x_1 = 1 \end{aligned}$$

Um weitere Nullstellen zu ermitteln, wird die Funktion $f(x)$ durch den Linearfaktor der ersten Nullstelle $(x-1)$ dividiert:

$$\begin{array}{r} (2x^3 + 3x^2 - 4x - 1) : (x - 1) = 2x^2 + 5x + 1 \\ -(2x^3 - 2x^2) \\ \hline 5x^2 \\ -(5x^2 - 5x) \\ \hline 1x \\ -(1x - 1) \\ \hline 0 \end{array}$$

Nach der durchgeführten Polynomdivision erhält man „neue“ Funktion $g(x) = 2x^2 + 5x + 1$. Von dieser kann mit Hilfe der pq-Formel leicht die fehlenden Nullstellen berechnet werden.

$$\begin{aligned} 0 &= 2x^2 + 5x + 1 & | :2 \\ 0 &= x^2 + 2,5x + \frac{1}{2} & | \text{pq-Formel} \\ x_{2/3} &= -\frac{2,5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2,5}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}} \\ x_2 &= -0,22 & x_3 &= -2,28 \end{aligned}$$

Damit ergibt sich die Linearfaktordarstellung der Funktion: $f(x) = 2(x - 1)(x + 0,22)(x + 2,28)$

Ausführliches Beispiel: Linearfaktordarstellung der Funktion

$$f(x) = x^5 - 4x^4 - 13x^3 + 52x^2 + 36x - 144$$

1. Nullstelle durch Probieren ermitteln:

$$\begin{aligned} \triangleright x=1 \quad & 0 = 1^5 - 4 \cdot 1^4 - 13 \cdot 1^3 + 52 \cdot 1^2 + 36 \cdot 1 - 144 \\ & 0 = -72 \quad \downarrow \\ & \hookrightarrow \text{keine Nullstelle} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \triangleright x=-1 \quad & 0 = (-1)^5 - 4 \cdot (-1)^4 - 13 \cdot (-1)^3 + 52 \cdot (-1)^2 + 36 \cdot (-1) - 144 \\ & 0 = -120 \quad \downarrow \\ & \hookrightarrow \text{keine Nullstelle} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \triangleright x=2 \quad & 0 = 2^5 - 4 \cdot 2^4 - 13 \cdot 2^3 + 52 \cdot 2^2 + 36 \cdot 2 - 144 \\ & 0 = 0 \quad \text{w.A.} \\ & \hookrightarrow x_1 = 2 \text{ ist Nullstelle} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} (x^5 - 4x^4 - 13x^3 + 52x^2 + 36x - 144) : (x-2) = \underline{\underline{x^4 - 2x^3 - 17x^2 + 18x + 72}} \\ \underline{-(x^5 - 2x^4)} \\ -2x^4 \\ \underline{-(-2x^4 + 4x^3)} \\ -17x^3 \\ \underline{-(-17x^3 + 34x^2)} \\ 18x^2 \\ \underline{-(18x^2 - 36x)} \\ 72x \\ \underline{-(72x - 144)} \\ 0 \end{array}$$

$$\hookrightarrow f(x) = (x^4 - 2x^3 - 17x^2 + 18x + 72) \cdot (x-2)$$

$$\triangleright 0 = x^4 - 2x^3 - 17x^2 + 18x + 72$$

(Hinweis: $x=1$ / $x=-1$ / $x=2$ nicht erneut testen)

$$\begin{aligned} \triangleright x=-2 \quad & 0 = (-2)^4 - 2 \cdot (-2)^3 - 17 \cdot (-2)^2 + 18 \cdot (-2) + 72 \\ & 0 = 0 \quad \checkmark \end{aligned}$$

$$\hookrightarrow x_2 = -2 \text{ ist Nullstelle}$$

Polynomdivision 2. Durchgang

$$\begin{array}{r}
 (x^4 - 2x^3 - 17x^2 + 18x + 72) : (x+2) = \underline{\underline{x^3 - 4x^2 - 9x + 36}} \\
 \underline{-(x^4 + 2x^3)} \\
 -4x^3 \\
 \underline{-(-4x^3 - 8x^2)} \\
 -9x^2 \\
 \underline{-(-9x^2 - 18x)} \\
 36x \\
 \underline{-(36x + 72)} \\
 0
 \end{array}$$

$$\hookrightarrow f(x) = (x^3 - 4x^2 - 9x + 36) \cdot (x+2) \cdot (x-2)$$

$$\triangleright 0 = x^3 - 4x^2 - 9x + 36$$

$$\triangleright x = 3 \quad 0 = 3^3 - 4 \cdot 3^2 - 9 \cdot 3 + 36$$

$$0 = 0 \quad \text{w. A.}$$

$$\hookrightarrow x_3 = 3 \text{ ist Nullstelle}$$

Polynomdivision 3. Durchgang

$$\begin{array}{r}
 (x^3 - 4x^2 - 9x + 36) : (x-3) = \underline{\underline{x^2 - x - 12}} \\
 \underline{-(x^3 - 3x^2)} \\
 -x^2 \\
 \underline{-(-x^2 + 3x)} \\
 -12x \\
 \underline{-(-12x + 36)} \\
 0
 \end{array}$$

$$\hookrightarrow f(x) = (x^2 - x - 12) \cdot (x-3) \cdot (x+2) \cdot (x-2)$$

$$\triangleright 0 = x^2 - x - 12 \quad \text{pq-Formel}$$

$$\begin{aligned}
 x_{4/5} &= -\frac{-1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2 + 12} \\
 &= \frac{1}{2} \pm 3,5
 \end{aligned}$$

$$x_4 = -3$$

$$x_5 = 4$$

$$\text{Linearfaktordarstellung: } f(x) = (x-2)(x+2)(x-3)(x+3)(x-4)$$

Hinweis: Wenn alle Koeffizienten der Funktion ganzzahlig sind, dann sind die Nullstellen der Funktion Teiler des absoluten Gliedes. Wobei sowohl die positiven, als auch die negativen Zahlen betrachtet werden.

Übungsaufgabe

Ermittle alle Nullstellen der Funktion.

1) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

Lsg: 1 / 2 / 3

2) $f(x) = x^3 + 4x^2 - 51x - 54$

Lsg: -1 / -9 / 6

3) $f(x) = \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{26}{9}$

Lsg: 1 / 6,196 / -4,196

4) $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{3}{2}x^3 - x^2 + 3x + 2$

Lsg: 2 / -1 / -0,73 / 2,73

5) $f(x) = x^6 - 7x^5 + 7x^4 + 35x^3 - 56x^2 - 28x + 48$

Lsg: -2 / -1 / 1 / 2 / 3 / 4